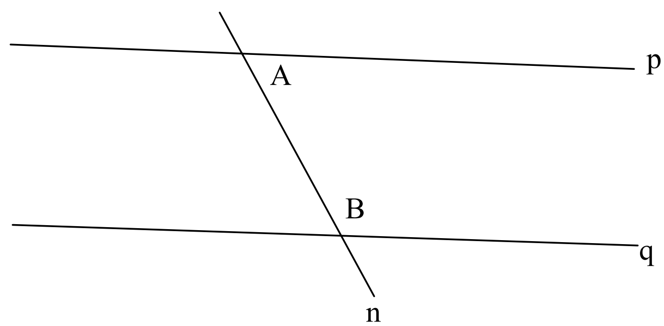
Fimmta frumsetningin og upphaf óevklíðskrar rúmfræði

Hinar fimm rúmfræðilegu frumsetningar í *Frumþáttum* Evklíðs eru:

1. Frá hvaða punkti sem er má draga beina línu í hvaða punkt sem er.
2. Strik af endanlegri lengd má framlengja í beina línu.
3. Hægt er að draga hring með hvaða fjarlægð sem er fyrir radíus og hvaða punkt sem er fyrir miðju.
4. Öll rétt horn eru jafn stór.
5. Ef strik sker tvær línur og innri hornin á aðra hlið þess eru samtals minni en tvö rétt horn þá skerast línurnar tvær þeim megin við strikið ef þær eru framlengdar ótakmarkað.

Sú fimmta sker sig úr því hún er langtum lengri og flóknari en hinar. Ef hún er heimfærð upp á myndina hér fyrir neðan þýðir hún að ef $A + B < 180°$ þá skerist línurnar p og q hægra megin við strikið n ef þær eru framlengdar nógu langt.



Þessi frumsetning er engan veginn eins augljós og hinar fjórar. Hvað ef A + B eru næstum 180° en ekki alveg, þá gæti skurðpunktur línanna verið í trilljón kílómetra farlægð. Hvað ef alheimurinn er ekki svo stór? Og hvað ef geimurinn er með einhverjum þeim ósköpum að fjarlægð milli samsíða lína eykst eða minnkar á einhverjum stöðum í honum?

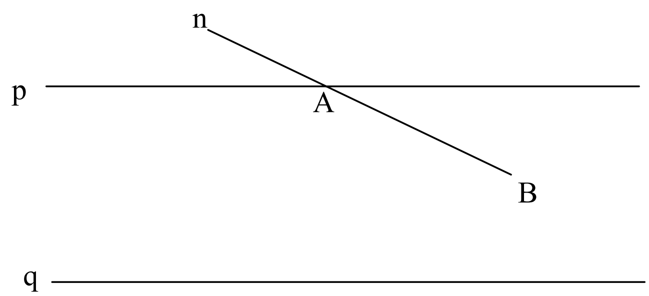
Ekki vitum við hvort svona efasemdir sóttu á Evklíð. En af einhverjum ástæðum frestaði hann því í lengstu lög að nota fimmtu frumsetninguna og 28 fyrstu setningar *Frumþáttanna* eru sannaðar án þess að hún komi við sögu þótt sumar þeirra hefði verið auðveldara að sanna með því að nota hana.

Engar heimildir eru um að fornir stærðfræðingar hafi efast um að fimmta frumsetningin sé sönn. Hins vegar efuðust ýmsir um að hún ætti að vera frumsetning og reyndu að leiða hana af hinum fjórum eða af þeim og öðrum ámóta einföldum og augljósum forsendum. Ein merkileg tilraun í þessa veru var gerð af stærðfræðingi sem hét Proclus (410-485 e. Kr.). Proclus tókst að sanna að hægt sé að leiða fimmtu frumsetninguna af hinum fjórum og forsendunni:

P: Ef p og q eru samsíða línur og línan n sker p þá sker n líka q.

Hann taldi sig líka geta leitt P af fyrstu fjórum frumsetningum Evklíðs og áleit sig þar með hafa sannað að fimmta frumsetningin sé ekki óháð hinum og ætti því ekki að vera frumsetning heldur sönnuð setning. Rök Proclusar voru á þessa leið:

Drögum samsíða línur p og q. Mörkum punkt A á p og punkt B milli p og q og drögum strik n gegnum A og B. Það er sama hvaða fjarlægð, f, er tiltekin, hægt er að framlengja strikið n í stefnuna frá A til B þannig að fjarlægðin milli p og enda þess verði meiri en f. Þar með getur fjarlægðin milli p og enda striksins orðið meiri en bilið milli p og q og þá hlýtur n að skera q.



Í þessari rökfærslu Proclusar er falin forsenda sem ekki verður leidd af fyrstu fjórum frumsetningum Evklíðs, nefnilega að það sé fast bil milli p og q. Ef þetta bil eykst sem fjær dregur punktinum A er alls óvíst að strikið n nái nokkurn tíma að brúa það allt.

Það sem Proclusi tókst í raun og veru að sanna er ekki að fimmta frumsetningin sé afleiðing af hinum fjórum heldur að hún sé jafngild setningunni:

5_P: Milli tveggja samsíða lína er alls staðar sama bil.

Samsíða línur merkir hér línur sem skerast ekki þótt þær séu framlendar ótakmarkað í báðar áttir.

Þegar sagt er að 5_P sé jafngild fimmtu frumsetningu Evklíðs (sem við getum kallað 5_E) er átt við að:

Af fyrstu fjórum frumsetningunum og 5_P sé hægt að leiða 5_E og
Af fyrstu fjórum frumsetningunum og 5_E sé hægt að leiða 5_P.

Þetta þýðir að það mundi engu breyta um hvað hægt er að sanna og hvað ekki þó skipt væri á 5_E og 5_P.

Síðan Proclus var og hét hafa stærðfræðingar uppgötvað margar aðrar setningar sem eru jafngildar 5. frumsetningu Evklíðs. Hér eru nokkrar af þeim frægustu ásamt nöfnum höfunda sinna.

Proclus:	Milli tveggja samsíða lína er alls staðar sama bil.
Sacceri og Laplace	Til eru tveir misstórir þríhyrningar með jafnstór horn.
Playfair	Sé gefin lína l og punktur P sem er ekki á línunni þá er aðeins hægt að draga eina línu gegnum P samsíða línunni l.
Legendre	Til er þríhyrningur sem hefur hornasummuna 180°.
Gauss	Fyrir sérhverja tölu k>0 er til þríhyrningur sem hefur meira flatarmál en k.
Bolyai	Séu gefnir þrír punktar sem ekki liggja á beinni línu þá er til hringur gegnum þá alla.

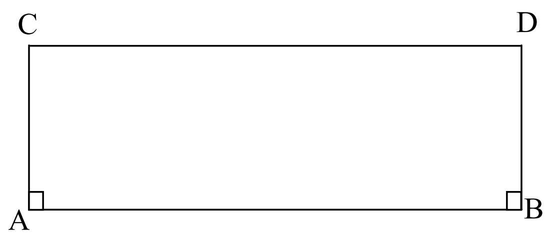
Einhver merkilegasta tilraunin til að sanna fimmtu frumsetningu Evklíðs var gerð af ítalska prestinum Girolamo Saccheri (1667-1733). Aðferð hans var í stuttu máli sú að rannsaka hvaða afleiðingar það hefði að neita henni. Saccheri taldi að með því að leiða setningar með ströngum og pottþéttum rökum af fyrstu fjórum frumsetningum Evklíðs og neitun þeirrar fimmtu mundi hann fá fram mótsögn og þar með geta sannað að neitun fimmtu frumsetningarinnar stangist á við hinar fjórar og hún sé því rökleg afleiðing af þeim.

Rökfræðilega er ekkert við þessa aðferð Saccheris að athuga. Ef við vitum að $F_1, F_2, \dots F_n$ eru sannar forsendur og sýnum fram á að af þeim og *ekki P* leiði mótsögn þá höfum við þar með sýnt fram á að P er sönn setning og rökleg afleiðing af forsendunum $F_1, F_2, \dots F_n$.

En Saccheri fann enga mótsögn. Setningarnar sem hann leiddi af fyrstu fjórum frumsetningum Evklíðs og neitun þeirrar fimmtu voru kannski undarlegar og ósennilegar og andstæðar rúmskynjun venjulegra manna en þær voru ekki mótsagnakenndar, engar tvær þeirra stönguðust á. Það sem Saccheri fann í raun og veru var því ekki sönnun á fimmtu frumsetningunni heldur ný rúmfræði sem er öðru vísi en rúmfræði Evklíðs. Hann hafnaði þessari rúmfræði raunar og sagði að hún væri andstæð eðli hinnar beinu línu.

Rit Saccheris um þetta efni heitir því langa nafni *Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa geometriae principia* og kom út árið sem hann lést, 1733. Í rökfæslum sínum notar Saccheri ferhyrning sem er byggður eins og hér er lýst:

Byrjað er á að draga strikið AB. Á enda þess eru dregin tvö jafnlöng strik AC og BD hornrétt á það og endar þeirra tengdir með beinni línu CD.



Saccheri gat sannað að það leiðir af fyrstu fjórum frumsetningum Evklíðs að hornin C og D eru jafnstór. Það eru því þrír möguleikar:

1. C og D gætu verið hvöss horn (þ.e. minni en rétt horn).
2. C og D gætu verið rétt horn.
3. C og D gætu verið gleið horn (þ.e. stærri en rétt horn).

Saccheri gat sannað að þriðja tilgátan stangast á við þá forsendu að bein lína hafi óendanlega lengd. Önnur frumsetning Evklíðs segir að strik af endanlegri lengd megi framlengja í beina línu. Þetta túlkaði Saccheri svo að bein lína sé óendanlega löng og miðað við þá túlkun stangast þriðja tilgátan á við aðra frumsetningu Evklíðs. Sé frumsetning númer tvö hins vegar aðeins skilin svo að það sé sama hversu langt hafi verið farið eftir línu það megi alltaf halda áfram þá útilokar hún ekki að lína sé eins og hringur með endanlega stærð án þess að nokkurs staðar sé endapunktur.

Saccheri gat líka sannað að fimmta frumsetning Evklíðs er afleiðing af annarri tilgátunni. Hann reyndi að hrekja fyrstu tilgátuna með því að leiða af henni mótsögn. Eins og nefnt hefur verið tókst það ekki en hefði það tekist þá hefði aðeins önnur tilgátan komið til greina (að því gefnu að við álítum að önnur frumsetningin kveði á um að lína sé óendanlega löng) og þar með hefði fimmta frumsetningin verið sönnuð því hún er afleiðing af því að C og D séu rétt horn.

Nú vita menn að það er ekki hægt að leiða mótsögn af fyrstu fjórum frumsetningum Evklíðs og fyrstu tilgátu Saccheris. Sú rúmfræði sem fæst með því að gera ráð fyrir fyrstu tilgátunni er kölluð hyperbólsk rúmfræði. Í hyperbólskri rúmfræði er hornasumma þríhyrnings minna en tvö rétt horn og því minni því stærri sem þríhyrningurinn er. Í slíkri rúmfræði er líka hægt að dragar margar línur samsíða gefinni línu gegnum sama punkt.

Eigi að nota þriðju tilgátu Saccheris verður að hafna því að lína hafi óendanlega lengd. Sú rúmfræði sem þá fæst kallast elliptísk rúmfræði. Í henni er hornasumma þríhyrnings meiri en tvö rétt horn og því meiri því stærri sem þríhyrningurinn er. Í slíkri rúmfræði eru engar tvær línur samsíða.

Hyperbólsk rúmfræði og elliptísk rúmfræði kallast einu nafni óevklíðsk rúmfræði. Rúmfræði sem gerir ráð fyrir annarri tilgátu Saccheris eða fimmtu frumsetningu Evklíðs kallast hins vegar evklíðsk rúmfræði. Rúmfræði sem ekki gerir ráð fyrir neinu af þessu er hlutlaus. Þar sem fyrstu 28 setningarnar í *Frumþáttum* Evklíðs eru aðeins leiddar af frumsetningum númer 1 til 4 en styðjast ekki við fimmtu frumsetninguna tilheyra þær hlutlausri rúmfræði.

Þótt Saccheri hafi stigið fyrstu skrefin í rannsóknum á óevklíðskri rúmfræði þá vakti það eitt fyrir honum að hrekja hana. Það var ekki fyrr en á fyrri hluta 19. aldar að stærðfræðingar tóku að rannsaka óevklíðska rúmfræði með opnum huga og gera sér skipulega grein fyrir eiginleikum hennar. Helstu frumkvöðlar á þessu sviði voru Þjóðverjinn Karl Friedrich Gauss (1777-1855), Rússinn Nikolai Ivanovich Lobachewsky (1793-1856) og Ungverjinn János Bolyaí (1802-1860).

Gauss er iðulega talinn ásamt Arkimedesi og örfáum öðrum í hópi mestu stærðfræðinga allra tíma. Hann varð fyrstur þessara þremenninga til að rannsaka eiginleika óevklíðskrar rúmfræði en hann birti niðurstöður sínar ekki á prenti og rit hans um þetta efni komu ekki út fyrr en eftir miðja 19. öld. Lobachevski varð fyrstur þessara þremenninga til að birta niðurstöður sínar. Rit hans um óevklíðska rúmfræði kom út árið 1829. Bolyaí birti kenningar sínar árið 1833 í 26 blaðsíðan eftirmála við bók um rúmfræði eftir föður sinn Wolfgang Bolyaí.

Allir þessir þremenningar fengust við hyperbólska rúmfræði og þeir mótuðu hugmyndir sínar óháð hver öðrum á árunum milli 1820 og 1830. Elliptísk rúmfræði þróaðist nokkru síðar. Helsti frumkvöðull hennar var Þjóðverjinn George Riemann (1826-1866).

Í upphafi höfðu frumkvöðlar óevklíðskrar rúmfræði nokkrar áhyggjur af því að hún kynni að fela í sé mótsagnir þótt ekki hefði tekist á leiða þær í ljós. Ekki leið þó á löngu áður en sýnt var fram á að óevklíðsk rúmfræði er laus við mótsagnir ef evklíðsk rúmfræði er það. Þetta var gert með því að smíða líkön af óevklíðskri rúmfræði innan evklíðskrar rúmfræði. Gerð slíks líkans er í því fólgin að túlka óskilgreindu hugtökin í frumsetningunum þannig að þær verði sannar um einhvern hluta evklíðskrar rúmfræði.

Ef orðið *lína* merkir *stórbaugur á yfirborði kúlu* (þ.e. hringur sem skiptir yfirborði kúlu í tvo jafnstóra helminga) og *punktur* merkir *punktur á yfirborði kúlu* þá verða allar setningar elliptískrar rúmfræði sannar um kúlu í evklíðsku rúmi. Það er t.d. satt að engir tveir stórbaugar á kúlu séu samsíða, tveir slíkir baugar hljóta að skerast. Það er líka satt að hornasumma þríhyrnings á kúlu sé meira en 180°.

Það er ögn flóknara mál að búa til svona líkan fyrir hyperbólska rúmfræði en það er hægt.

Dálítil rökfræði

Sú aðferð til sanna samkvæmni sem hér var nefnd byggist á því að röklegar afleiðingar frumsetninganna eru óháðar því hvað óskilgreind orð eins og punktur og lína merkja. Í stað þeirra mætti eins setja merkingarlaus tákn á borð við p og l. Þetta er vel þekkt úr einfaldri rökfræði. Gildi eftirfarandi rökfærslu er t.d. algerlega óháð því hvað orðin vúbb og strúldur þýða:

Forsenda 1: Ef vúbbið er komið þá er mikið strúldur.
Forsenda 2: Það er ekkert strúldur.

Niðurstaða: Vúbbið er ekki komið.

Líkön af óevklíðskri rúmfræði sem menn nota bæði til að gera sér hugmyndir um hana (eftir því sem það er mögulegt) og til að staðfesta að hún sé laus við mótsagnir túlka línur yfirleitt sem sveigðan feril (eins og t.d. stórbaug á kúlu). Það er því oft talað um að rúmið sem evklíðsk rúmfræði lýsir sé flatt en elliptísk og hyperbólsk rúmfræði fjalli um sveigt rúm.

Uppgötvanir Gauss, Bolyaí og Lobachevski á óevklíðskri rúmfræði eru með merkustu vísindaafrekum 19. aldar. Með þeim urðu þáttaskil í vísindasögunni því menn fóru í auknum mæli að rannsaka möguleika sem ekki er hægt að sjá fyrir sér eða gera sér myndir af í huganum. Mannlegt ímyndunarafl var ekki lengur mælikvarði á hvað gæti verið til og hvað ekki. Með þessu var brautin ekki aðeins rudd fyrir framfarir í hreinni stærðfræði heldur líka þær tvær byltingar sem mótað hafa eðlisfræði og heimsmynd 20. aldar: skammtafræðina og afstæðiskenninguna.

Skammtafræðin fjallar um hinar smæstu einingar efnisins og nýlegar kenningar á því sviði gera ráð fyrir að innan atómkjarna gildi önnur rúmfræði en sú sem kennd er við Evklíð. Afstæðiskenningin er meðal annars notuð til að rannsaka óravíddir geimsins og hún kveður á um að þungir hlutir valdi sveigju í rúminu og frumsetningar Evklíðs séu því ekki sannar um þann himingeim sem við sjáum hvelfast yfir okkur á stjörnubjartri nótt. Ekki er þó vitað með neinni vissu hvort rúmið er aðeins sveigt við þunga hluti og svarthol en flatt í stórum dráttum eins og evklíðsk rúmfræði gerir ráð fyrir eða hvort það er í aðalatriðum sveigt á annan hvorn veginn. Hver sem endanlegur sannleikur er um þetta efni þá er svo mikið víst að óevklíðsk rúmfræði er ekki bara leikfang stærðfræðinga heldur óaðskiljanlegur hluti af heimsmynd vísindanna.

Að mestu byggt á:
A. Aaboe: *Episodes from the Early History of Mathematics,* Whasington DC 1964.
L. B. Blumenthal: *A Modern View of Geometry*. New York 1980.
L. Sklar: *Space, Time, and Spacetime*, Los Angeles 1974.