Stærðfræði í Grikklandi til forna

Gullöld grískra vísinda og lista hófst á 6. öld fyrir okkar tímatal og þá varð stærðfræði til sem sjálfstæð vísindagrein. Löngu fyrr höfðu Egyptar, Babylónímenn og fleiri fornþjóðir notað talnareikning í viðskiptum og stuðst við rúmfræðilega útreikninga við landmælingar, stjörnuathuganir og mannvirkjagerð.

Í ritum sagnfræðingsins Heródóts (484-425 f. Kr.) segir að Þales frá Miletos (um 600 f. Kr.) sé upphafsmaður grískrar stærðfræði. Þales er hálfgerð þjóðsagnapersóna og um hann er fátt vitað með vissu. Þó má telja nokkuð víst að um hans daga hafi grískir spekingar byrjað að beita þeim aðferðum sem síðan hafa einkennt stærðfræðileg vísindi. Megineinkenni þessara aðferða eru að:

- ✓ Reglur eru *sannaðar* með því að leiða þær af forsendum sem annað hvort eru augljósar eða hafa áður verið sannaðar.
- ✓ Við sannanir og útleiðslur er beitt strangri rökfærslu. Það dugar ekki að benda á einstök dæmi eða sýna fram á að regla sé sennileg.

Til að skýra muninn á grískri stærðfræði og reikningskunnáttu annarra fornþjóða má taka Pyþagórasarreglu sem dæmi. Egyptar og Babylóníumenn vissu það löngu fyrir daga grískrar stærðfræði að ef rétthyrndur þríhyrningur hefur skammhliðar sem eru 3 og 4 lengdareiningar þá er langhliðin 5 lengdareiningar. Þeir virðast einnig hafa gert sér grein fyrir þeirri almennu reglu að séu a og b skammhliðar og c langhlið í rétthyrndum þríhyrningi þá sé $a^2 + b^2 = c^2$. En í egypskum og babylónískum heimildum sjást engin merki þess að reynt hafi verið að rökstyðja regluna öðru vísi en með einstökum dæmum og mælingum á þríhyrningum. Með slíkum mælingum er hægt að leiða í ljós að:

Ef skammhliðar eru t.d. 6 og 8 þá sé langhliðin um það bil 10;
Ef skammhliðar eru t.d. 5 og 12 þá sé langhliðin um það bil 13 o. s. frv.

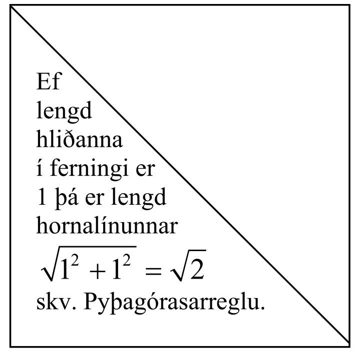
En þessi einstöku dæmi sanna ekki regluna og mælingar munu seint skera úr um hvort réttara sé að $a^2 + b^2 = c^2$ eða að $a^2 + b^2 = 1{,}0000000000000000001 \cdot c^2$. Þær svara því heldur ekki hvort reglan gildi um alla rétthyrnda þríhyrninga líka þá sem hafa aðra skammhliðina trilljón sinnum lengri en hina. En ef stærðfræðileg sönnun á reglunni er leidd af forsendum sem hafnar eru yfir allan vafa þá má fullyrða að reglan sé nákvæmlega rétt og algild.

Regla sú sem hér hefur verið rætt um er yfirleitt kennd við spekinginn Pyþagóras (um 580-500 f. Kr.) sem ásamt Þalesi er iðulega talinn einn helsti upphafsmaður stærðfræðilegra rannsókna meðal Grikkja.

Á þessum tíma var Grikkland töluvert stærra en það er nú, náði yfir mestalla strandlengju Miðjarðarhafsins frá þeim löndum sem nú tilheyra Ítalíu, inn með Svartahafi og með mestallri strandlengjunni sem nú tilheyrir Tyrklandi. Pyþagóras hélt sig að mestu á svæði sem nú er ítalskt land og Þales bjó á strönd Litlu-Asíu sem nú er í Tyrklandi.

Um gríska stærðfræði fyrir daga Evklíðs er því miður lítið vitað og öll grísk stærðfræðirit frá þessum tíma eru glötuð. Þó er vitað að það urðu þáttaskil í stærðfræði og fleiri vísindum þegar heimspekingurinn Platon stofnaði skóla í Aþenu milli 380 og 390 f. Kr. Sá skóli hét *Akademía* og var í raun fyrsti háskóli á Vesturlöndum. Þar var bæði stunduð kennsla og rannsóknir og stærðfræði var í sérstökum hávegum höfð umfram aðrar fræðigreinar. Á fyrstu árum Akademíunnar störfuðu þar nokkrir merkir stærðfræðingar. Þeirra frægastur er Evdoxus (408-355 f. Kr.)

Talið er að stærðfræðingar við *Akademíuna* hafi einkum fengist við rúmfræði og rúmfræðin náði meiri þroska en aðrar greinar grískrar stærðfræði. Tveim öldum fyrr, á tíma Pyþagórasar, virðast Grikkir hafa iðkað rúmfræði, talnafræði og algebru jöfnum höndum. En einhvern tíma milli Pyþagórasar og Evdoxusar rataði grísk algebra í ógöngur.



Grískir stærðfræðingar í fornöld litu á tölur sem hlutföll (eins og við gerum þegar við ritum almenn brot). En einhver snillingur komst að því að sumar stærðir er ekki hægt að tjá sem almenn brot. T.d. er ekki hægt að tjá lengd hornalínu í ferningi með hliðalengdina 1 sem almennt brot. Nú til dags er þetta orðað svo að $\sqrt{2}$ sé óræð tala. En Grikkirnir orðuðu þetta svo að lengd hornalínunnar verði ekki tjáð með neinni tölu því í þeirra augum voru tölur hlutföll (eða m. ö. o. almenn brot).

Þetta varð til þess að grískir stærðfræðingar vissu ekki almennilega hvað halda skyldi um tölur. Þeir voru nógu rökvísir, skýrir í hugsun og strangfræðilegir til að gera sér grein fyrir djúpum og torleystum vandamálum sem tengjast óræðum tölum. Þessi vandamál voru ekki leyst með viðhlítandi hætti fyrr en á 19. öld. Í stað þess að leiða vandann hjá sér eða reyna að kjafta sig frá honum með rugli og fimbulfambi fundu Grikkir leiðir fram hjá honum með því að umorða ýmis viðfangsefni á sviði algebru á mál rúmfræðinnar. Þetta er ein af mikilvægustu ástæðum þess að þeir lögðu meiri rækt við rúmfræði en aðrar greinar stærðfræði. Rúmfræðin var laus við þær röklegu ógöngur sem algebran rataði í þegar í ljós kom að sumar stærðir verða ekki tjáðar sem hlutföll milli heilla talna. Með sirkli og reglustiku er t.d. hægt að draga strik sem er $\sqrt{2}$ einingar að lengd þótt þessi stærð verði ekki tjáð sem ræð tala.

Sönnun þess að $\sqrt{2}$ sé óræð tala

Ekki er vitað hvernig menn hugsuðu fyrstu sönnun þess að hornalína í ferningi með hliðalengdir 1 verði ekki tjáð sem almennt brot en með orðalagi og táknmáli frá seinni tímum er hægt að sanna að $\sqrt{2}$ sé óræð tala svona:

Ef til er almennt brot sem er jafnt $\sqrt{2}$ þá er til fullstytt almennt brot p/q þannig að $\sqrt{2}$ = p/q. Þar sem brotið er fullstytt getur ekki verið að bæði p og q séu sléttar tölur. Fyrst $\sqrt{2}$ = p/q hlýtur að gilda að $2 = p^2/q^2 \Rightarrow 2q^2 = p^2$. Af þessu leiðir að 2 ganga upp í p^2 svo p er slétt tala, því sé oddatala hafin í annað veldi verður útkoman oddatala.

Þar sem p er slétt tala er til tala k þannig að $p = 2k$. Við getum því umritað jöfnuna $2q^2 = p^2$ svona: $2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ svo q er líka slétt tala sem er í mótsögn við þá forsendu að p/q sé fullstytt brot. Það er því ekki til neitt fullstytt brot sem er jafnt $\sqrt{2}$ og þar með er sannað að $\sqrt{2}$ sé ekki jöfn neinni tölu sem hægt er að rita sem almennt brot.

Elsta gríska stærðfræðirit sem varðveist hefur er heljarmikið verk í 13 bókum sem heitir *Stoíkeia* og er eftir Evklíð. Á latínu og fleiri málum er þetta rit nefnt *Elementa* og á íslensku kallast það *Frumþættir*. Þessi bók var vinsælasta kennslubók í stærðfræði í Evrópu í meira en 2000 ár og fáar bækur hafa náð meiri útbreiðslu. Um æfi Evklíðs er nær ekkert vitað en talið er að hann hafi búið í Alexandríu og ritað þetta mikla verk á árunum milli 330 og 320 f. Kr.

Tvær skemmtilegar þjóðsögur tengjast nafni Evklíðs. Um sanngildi þeirra er ekki vitað. Samkvæmt annarri á konungur að hafa litið í *Frumþættina* og spurt Evklíð hvort ekki væri einhver styttri leið til að læra rúmfræði. Evklíð á þá að hafa svarað og sagt að engir kóngavegir liggi til rúmfræðinnar. Samkvæmt annarri sögu á piltur einn að hafa byrjað nám í rúmfræði. Þegar hann hafði stautað sig í gegnum fyrstu sönnunina spurði hann hvað maður græddi eiginlega á að læra þetta. Þá kallaði Evklíð þá þræl sinn og sagði honum að skjótast eftir smápeningum til að gefa stráksa fyrst hann gæti ekki lært nema græða á því.

Í *Frumþáttum* Evklíðs er safnað saman mestallri stærðfræðilegri þekkingu sem til var á þessum tíma. Öll efnistök voru til slíkrar fyrirmyndar hvað varðaði skipulega framsetningu og fræðilega nákvæmni að menn hættu að afrita eldri bækur og þær glötuðust.

Fyrstu sex bækur *Frumþáttanna* fjalla um flatarmyndir og tvívíða rúmfræði, næstu fjórar um talnafræði og algebru og þær síðustu þrjár um þrívíða rúmfræði. Sumar sannanir Evklíðs eru hinar mestu gersemar, eins og til dæmis sönnun hans á því að til séu óendanlega margar prímtölur.

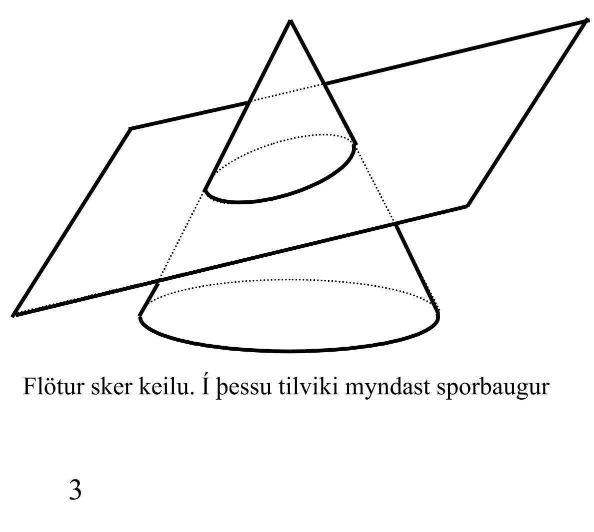
Sönnun Evklíðs á að til séu óendanlega margar prímtölur

Þetta er ekki þýðing á sönnun Evklíðs heldur lausleg endursögn:

Hugsum okkur að við höfum lista af prímtölum p_1, p_2, p_3 ... p_n. Hægt er að finna prímtölu sem er ekki á listanum með því að margfalda allar tölurnar á honum saman og bæta einum við. Þannig fæst tala $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Ef N er prímtala þá er fundin ný prímtala sem er ekki á listanum. Ef N er hins vegar ekki prímtala þá er hægt að þátta hana í prímþætti og þeir prímþættir geta ekki verið á listanum því ef einhverri prímtölu af listanum er deilt í N gengur 1 af. Það er því sama hvaða við höfum talið upp margar prímtölur, það eru alltaf til fleiri.

Ekki er vitað hvort Evklíð uppgötvaði sjálfur eitthvað af þeirri stærðfræði sem finna má í *Frumþáttunum* eða hvort hann skipaði aðeins niður í röklegt kerfi því sem fyrirrennarar hans höfðu afrekað. Vitað er að auk *Frumþáttanna* skrifaði Evklíð bók um keilusnið en hún er glötuð.

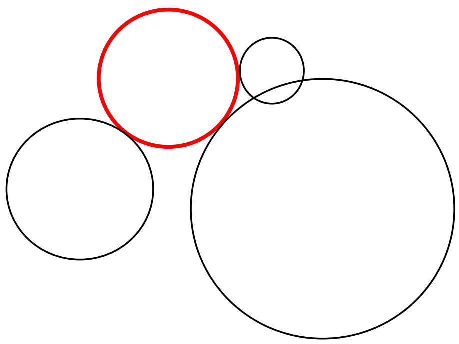
Af grískum stærðfræðingum sem uppi voru eftir daga Evklíðs eru Apollonius og Arkimedes langfrægastir. Langmestur hluti forngrískra stærðfræðirita sem varðveist hafa er skrifaður af þessum þremenningum.



Flötur sker keilu. Í þessu tilviki myndast sporbaugur

Apollonius (um 260 - um 170 f. Kr.) er frægastur fyrir ritið *Konika* sem fjallar um keilusnið. Keilusnið eru ferlar sem myndast þegar keila er skorin sundur af sléttum fleti, þ.e. sporbaugur (ellipsa), gleiðbogi (hyperbola) og fleygbogi (parabola). Þar sem rit Apolloniusar tók langt fram öllu því sem áður hafði verið skrifað um keilusnið hirtu menn ekki um að afrita eldri bækur um efnið og þær glötuðust, þ. á. m. bók Evklíðs sem áður er nefnd.

Rauði hringurinn snertir hina þrjá



Apollonius fjallaði um fleiri rúmfræðileg efni en keilusnið, m.a. um þraut sem við hann er kennt og kölluð þraut Apolloniusar. Hún er í því fólgin að teikna (með sirkli og ókvarðaðri reglustiku samkvæmt hefðbundnum reglum) hring sem snertir þrjá gefna hringi. Rit það sem geymdi lausn Apolloniusar á þessari þraut er glatað.

Arkimedes (um 287 - 212 f. Kr.) er með mestu afreksmönnum í allri sögu stærðfræðinnar. Hann bjó í Sýrakúsu á Sikiley. Níu bækur eftir hann hafa varðveist og í þeim fjallar hann um fjölmörg stærðfræðileg efni m.a.

- ✓ Aðferð til að nálgast rétt gildir á π.
- ✓ Aðferð til að reikna flatarmál sem afmarkast af línum og fleygboga.
- ✓ Rúmmál og yfirborð kúlu.

svo fátt eitt sé nefnt. Auk stærðfræðinnar fékkst Arkimedes við stjörnufræði og verkfræði. Meðal annars hannaði hann vopn og vígvélar til að verjast Rómverjum, en um þessar mundir voru þeir að leggja undir sig lönd við norðanvert Miðjarðarhaf og þrátt fyrir uppfinningar Arkimedesar náðu þeir Sýrakúsu á sitt vald.

Af Arkimedesi eru margar sögur í gömlum bókum. Ein segir frá því þegar hann sat í baði og uppgötvaði aðferð til að mæla eðlisþyngd hluta með því að vigta þá bæði í vatni og í lausu lofti. Varð hann svo frá sér numinn af hugmyndinni að hann stökk upp úr baðinu, hljóp nakinn um götur borgarinnar og hrópaði *evreka, evreka* en það merkir *ég hef fundið það.*

Önnur saga segir frá dauða Arkimedesar. Hann á að hafa setið, gamall maður, og rissað flatarmyndir í sandinn, niðursokkinn í rúmfræðipælingar, þegar rómverskur hermaður stóð allt í einu yfir honum. „Stígðu ekki á myndirnar mínar“ á Arkimedes að hafa sagt við hermanninn sem sjálfsagt hefur verið heimskur ribbaldi því hann brá sverði sínu og drap gamla manninn. Enginn veit hvað þumbi sá hét og líklega er öllum sama, en Arkimedesar verður minnst meðan enn er til hugsandi fólk.

Aðferðir þær sem Arkimedes mótaði vísuðu veginn til diffur- og tegurreikningsins sem Newton og Leibniz þróuðu á seinni hluta 17. aldar og það var ekki fyrr en á 17. öld sem stærðfræðilegar rannsóknir á Vesturlöndum komust aftur upp á sama plan og verk Arkimedesar.

Að mestu byggt á:
A. Aaboe: *Episodes from the Early History of Mathematics,* Whasington DC 1964.