Kvaðrat hrings og óleysanleg verkefni

Í fornöld uppgötvuðu grískir stærðfræðingar leiðir til að teikna ýmsar flóknar myndir með því að fylgja föstum reglum og nota aðeins sirkil og ókvarðaða reglustiku. Reglurnar sem þeir fylgdu leyfðu aðeins að:

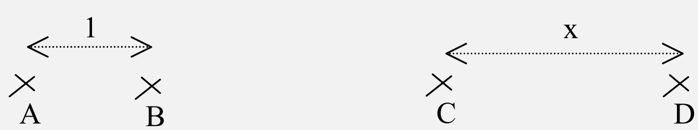
- ✓ Setja punkt hvar sem er á flötinn;
- ✓ Að draga strik eða línu milli tveggja punkta;
- ✓ Að draga hring um punkt og hafa bil milli hvaða tveggja punkta sem er fyrir radíus.
- ✓ Marka punkt þar sem tvær línur, tveir hringir eða lína og hringur skerast.

Með þessum einföldu aðgerðum er hægt að leggja saman tvær lengdir, draga eina lengd frá annarri, margfalda saman tvær lengdir og deila einni lengd í aðra. Einnig er hægt að draga kvaðratrót af gefinni lengd.

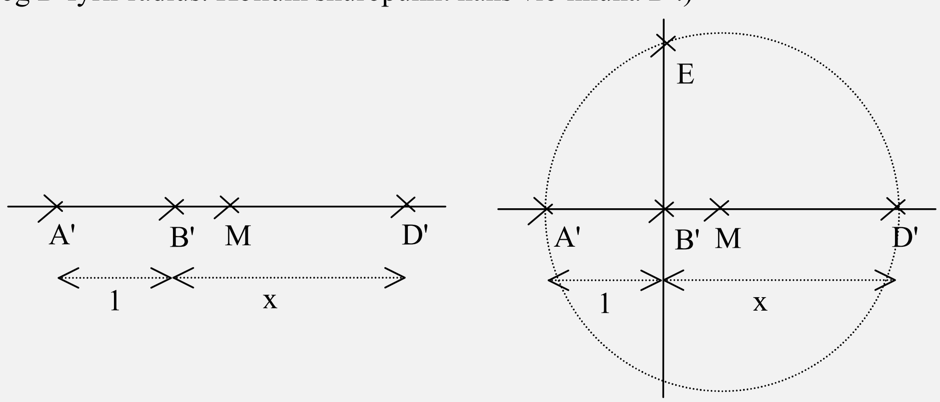
Að reikna kvaðratrót með sirkli og reglustiku

Til að leysa þetta verkefni þarf bil af lengd 1 að vera gefið.

Gerum ráð fyrir að bilið milli A og B sé 1 og finnum kvaðratrótina af bilinu milli C og D sem við skulum kalla x.



Við byrjum á að draga línu og marka á hana lengdirnar 1 og x. (Þetta er gert með því að marka fyrst punkt, A', af handahófi á línuna og draga svo hring, eða boga, með þann punkt fyrir miðju og fjarlægðina milli A og B fyrir radíus. Köllum skurðpunkt hringsins og línunnar B' og drögum annan hring með B' fyrir miðju og bilið milli C og D fyrir radíus. Köllum skurðpunkt hans við línuna D'.)



Næst er miðpunktur A'D' fundinn (með því að draga hring með A' fyrir miðju og A'D' fyrir radíus og annan með D' fyrir miðju og sama radíus og draga línu gegnum skurðpunkta hringanna. Á myndinni hér að ofan til vinstri er miðpunktur A'D' kallaður M.

Næst er dreginn hringur með miðju í M og A'M = MD' fyrir radíus. Að síðustu er svo dreginn þverill á línuna gegnum B' og markaður skurðpunktur hans við hringinn. Þennan punkt getum við kallað E. (Þverillinn er teiknaður með því að draga lítinn hring um B', marka skurðpunkta hans við línuna og nota þá fyrir miðjur tveggja hringa sem eru jafnstórir og báðir stærri en hringurinn um B'. Lína gegnum skurðpunkt þeirra er þverill á línuna gegnum punktinn B'.) Eftir þetta er myndin eins og hér að ofan til hægri.

Nú er $\Delta A'B'E \approx \Delta EB'D'$ svo ef fjarlægðin milli B' og E er y gildir jafnan:. $\frac{1}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}$

Á tíma Evklíðs kunnu stærðfræðingar að byggja reikniaðgerðirnar +, -, ×, ÷ og √ með þeim teikniaðferðum sem hér hefur verið lýst. Auk þess gátu þeir leyst ótal þrautir eins og t.d. að teikna reglulegan fimmhyrning. Sum vandamál tókst þó ekki að leysa. Nokkur þeirra urðu fræg þegar í fornöld. Hér skal getið fjögurra:

- ✓ Að þrískipta horni. Sumum hornum eins og 90° og 45° er að vísu auðvelt að skipta í þrjá jafna hluta en sá vandi sem hér um ræðir er að finna aðferð sem dugar almennt og yfirleitt til að þrískipta hvaða horni sem er.
- ✓ Að tvöfalda tening. Ef hliðalengd tenings er gefin á að finna lengd hliða í teningi sem hefur tvöfalt meira rúmmál. Þetta er í raun sama vandamál og að reikna $\sqrt[3]{2}$ því séu hliðalengdir tenings margfaldaðar með $\sqrt[3]{2}$ fæst teningur með tvöfalt meira rúmmál.
- ✓ Að teikna reglulegan 7-hyrning.
- ✓ Að finna kvaðrat hrings. Ef radíus hringsins er gefinn á að finna hliðalengd í ferningi sem hefur sama flatarmál og hringurinn. Ef radíusinn er r er hliðalengd ferningsins að sjálfsögðu $r \cdot \sqrt{\pi}$. Þar sem hægt er að margfalda saman tvær gefnar lengdir og draga kvaðratrót af gefinni lengd er þetta í raun sama vandamál og að finna strik af lengdinni π.

Þessi vandamál vöfðust fyrir mönnum svo öldum skipti. Það er langt síðan stærðfræðinga tók að gruna að þau væru óleysanleg en engum þeirra tókst að sanna það fyrr en Gauss (1777-1855) sýndi fram á það undir lok 18. aldar að ómögulegt sé að teikna reglulegan 7-hyrning.

Gauss var undrabarn í stærðfræði og 17 ára að aldri komst hann að því að sé p prímtala er þá og því aðeins hægt að teikna reglulegan p-hyrning með sirkli og reglustiku að p verði rituð á forminu $2^{2^k} + 1$ þar sem $k \in \mathbb{N}$. Prímtölur á þessu formi eru kallaðar Fermat prímtölur. Þær fyrstu eru 3, 5, 17, 257, 65537. Samkvæmt niðurstöðu Gauss er því hægt að teikna reglulega 3-, 5- og 17-hyrninga með sirkli og reglustiku en ekki reglulega 7-, 11- og 13-hyrninga.

Sagt er að Gauss hafi verið ákaflega stoltur af þessari fyrstu meiriháttar uppgötvun sinni á sviði stærðfræðinnar. Eftir að hann dó var reist stytta af honum í heimaborg hans, Göttingen í Þýskalandi. Fótstallur þeirrar styttu er reglulegur 17-hyrningur.

Þótt Gauss hafi orðið þetta mikið ágengt fyrir lok 18. aldar var stærsta skrefið til skilnings á því hvað hægt er að gera og hvað ekki er hægt að gera með sirkli og ókvarðaðri reglustiku stigið í byrjun 19. aldar þegar Ítalinn Ruffini (1765-1822), Norðmaðurinn Abel (1802-1829) og Frakkinn Galois (1811-1832) mótuðu nýjar rannsóknaraðferðir í algebru. Tæknin sem þeir mótuðu dugði til að sanna að þrjú af þeim fjórum vandamálum sem hér hafa verið talin (að tvöfalda tening, teikna reglulegan 7-hyrning, og þrískipta horni) verði ekki leyst með sirkli, reglustiku og hefðbundnum aðferðum.

Þegar sagt er að þessi vandamál séu óleysanleg er ekki verið að útiloka að hægt sé að finna lausn sem er rétt upp á svo og svo marga markverða stafi. Það er hægt að leysa þau öll ef aðeins er krafist nákvæmni upp á endanlegan fjölda aukastafa. Að þessi vandamál séu óleysanleg þýðir að ekki sé hægt að finna lausn af fullkominni nákvæmni. Leikreglurnar gera ráð fyrir að línur og bogar sem teiknaðir eru hafi enga þykkt, punktar enga stærð og reglustikunni og sirklinum sé beitt af algerri nákvæmni.

*

Snúum okkur nú að þeim uppgötvunum sem leiddu til þess að stærðfræðingum tókst að sanna þessi vandamál séu óleysanleg.

Á 16. og 17. öld fundu stærðfræðingar almennar formúlur til að finna rætur margliða af þriðja og fjórða stigi. Þessar formúlur voru myndaðar úr stuðlum margliðunnar, reikniaðgerðunum fjórum, veldum og rótum og því svipaðar formúlunni til að finna rætur annars stigs margliðu sem þekkt var síðan í fornöld. Menn bjuggust því við að senn fyndust ámóta aðferðir til að finna rætur margliða af fimmta stigi en í byrjun 19. aldar sönnuðu Abel og Ruffini að það sé ekki hægt að búa til algebrulega formúlu fyrir rótum margliðu af hærra stigi en fjórða. Þegar rætt er um algebrulega formúlu er átt við að hún sé samsett úr samlagningu, frádrætti, margföldun, deilingu, og veldum með ræðum veldisvísum (og þar eru rætur innifaldar því $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$). Aðferðirnir sem Abel, Ruffini og Galois mótuðu dugðu líka til að sanna að hvorki sé hægt að tjá rætur þriðja stigs margliðu né óræða þriðju rót af tölu (eins og t.d. $\sqrt[3]{2}$) með því að nota einungis reikniaðgerðirnar fjórar heiltöluveldi og kvaðratrót.

Formúlan fyrir rótum annars stigs margliðu

Margliða er stærð eins og $3x^4 + 4x^2 + 5x + 7$ eða almennt talað stærð á forminu $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$. Rætur margliðu eru þau gildi sem x þarf að hafa til að stærðin í heild sé jöfn núlli. T.d. eru -3 og 5 rætur $2x^2 - 4x - 30$.

Hæsti veldisvísirinn ræður stigi margliðu. Þannig hefur annars stigs margliða x^2 en ekki nein hærri veldi en það. Almenna reglan um rætur annars stigs margliðu er:

Ef $ax^2 + bx + c = 0$ þá er $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Eins og nefnt hefur verið er hægt að reikna samlagningu, frádrátt, margföldun, deilingu og kvaðratrót með sirkli og reglustiku. Þetta þýðir að séu í upphafi gefnar ræðar lengdir eða punktar með ræð hnit er hægt að mynda úr þeim allar lengdir og öll hnit sem fást með endurtekinni beitingu þessara fimm aðgerða á ræðar tölur. Aðrar stærðir er ekki hægt að mynda með sirkli, reglustiku og hefðbundnum aðferðum. Til að átta okkur á því hvers vegna það er ekki hægt skulum við huga að því að á mynd sem gerð er með sirkli og reglustiku ákvarðast punktar með tvennum hætti:

- ✓ Af skurðpunkti tveggja lína. Hnit slíks punkt finnast með því að leysa jöfnu af fyrsta stigi og það er hægt að gera með því að beita aðeins samlagningu, frádrætti, margföldun og deilingu.
- ✓ Af skurðpunkti hrings við línu eða annan hring. Hnit slíks punkt finnast með því að leysa jöfnu af öðru stigi og það er hægt að gera með því að beita aðeins samlagningu, frádrætti, margföldun, deilingu og kvaðratrót.

Lengd strika sem verða til á teikningunni má reikna út frá hnitum punkta með því að beita pyþagórasarreglu og hún byggist á þessum sömu aðgerðum. Sé lagt upp með ræð hnit og ræðar lengdir er því engin leið að mynda aðrar stærðir en þær sem fást með endurtekinni beitingu á aðgerðanna +, -, ×, ÷ og √ á ræðar tölur. Með þessu er hægt að mynda allar ræðar tölur ef gefið er bil af lengdinni 1 og líka óræðar tölur eins og $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ eða $\sqrt{32-\sqrt{8-\sqrt{\frac{13}{7}-\sqrt{2}}}}$. En það er af og frá að þetta dugi til að mynda allar tölur. Það er til dæmis ekki hægt að mynda $\sqrt[3]{2}$. Sumar margliður af hærra stigi en fjórða hafa rætur sem ekki er einu sinni hægt að tjá þó nota megi alla ræða veldisvísa auk reikniaðgerðanna fjögurra, +, -, × og ÷. Þessar stærðir er að sjálfsögðu ekki heldur hægt að mynda með sirkli og reglustiku ef byrjað er með tómar ræðar stærðir.

Ef til væru almennar aðferðir til að þrískipta horni, tvöfalda tening, teikna reglulegan 7-hyrning og finna kvaðrat hrings þá væri hægt að beita þeim á horn, strik og hringa af hvaða stærð sem er. Aðferð til að tvöfalda tening ætti að virka óháð því hvaða lengd er gefin sem hlið í honum. Eins ætti aðferð til að teikna 7-hyrning að virka óháð því hvaða lengd er gefin sem hlið í honum. Aðferðirnar ættu því að virka þótt allar stærðir sem byrjað er með séu ræðar.

Í ljósi þess sem að framan segir má ljóst vera að til að sanna að ekki sé hægt að leysa þessi verkefni dugar að sýna að lausnin innifeli stærð sem ekki verður mynduð af ræðum tölum með endurtekinni beitingu aðgerðanna +, -, ×, ÷ og √.

Eins og nefnt hefur verið jafngildir tvöföldun tenings því að mynda stærðina $\sqrt[3]{2}$ og það er ekki hægt. Á svipaðan hátt var sýnt fram á það á fyrri hluta 19. aldar að ekki sé hægt að mynda reglulegan 7-hyrning eða þrískipta horni. Það reyndist töluvert flóknara mál að sanna að ekki sé hægt að finna kvaðrat hrings með sirkli og reglustiku. Þetta tókst ekki fyrr en Lindemann sannaði það árið 1882 að π sé ekki algebrísk tala (þ.e. að ekki sé til margliða með ræðum stuðlum sem hefur π fyrir rót). Af þessari uppgötvun Lindemanns leiðir að talan π verði ekki mynduð með endurtekinni beitingu á aðgerðunum +, -, ×, ÷ og √ á ræðar tölur og þar með að ekki sé heldur hægt að mynda lengdina $\sqrt{\pi}$ eins og þarf að gera til að finna kvaðrat hrings.

Að mestu byggt á: R. Courant og H. Robbins: *What is Mathematics*. Oxford 1996.