

# Talan $\pi \approx 3.1415926535897932384626433832795$

Talan sem þarf að margfalda þvermál hrings með til að fá út ummál hans er kölluð  $\pi$  og táknuð með gríska stafnum  $\pi$  sem samsvarar  $p$  í latneska stafrófinu.

Það er hægt að sannreyna að  $\pi$  er rúmlega 3 með því að mæla ummál og þvermál kringlóttis hlutar með málbandi og deila og slíkum aðferðum hafa menn beitt frá örófi alda.

Í Babylónískum stærðfræðiritum frá því um 2000 f. Kr. er því haldið fram að  $\pi$  sé  $3\frac{1}{8}$ . Hvernig höfundar komust að þeirri niðurstöðu vitum við ekki en trúlegt er að þeir hafi stuðst við mælingar á hringlaga hlutum.

Fleiri fornþjóðir eins og Egyptar, Kínverjar og Indverjar fengust við stærðfræði og áttuðu sig á að  $\pi$  muni vera rétt rúmlega 3.

Stærðfræðilegar aðferðir til að nálgast rétt gildi á  $\pi$  upp á meira en 2 til 3 markverða stafi mótuðust meðal grískra vísindamanna. Sá þeirra sem komst lengst var Arkimedes (um 287-212 f. Kr.). Aðferð hans byggðist á því að reikna ummál umritaðs og innritaðs 96-hyrnings.

Arkimedes notaði ekki hornaföll svo það var töluvert mikið verk fyrir hann að reikna þetta. Það er auðvelt að reikna hliðalengd í umrituðum og innrituðum 6-hyrningi. Arkimedes fann leið til að reikna hliðalengd í innrituðum og umrituðum 2n-hyrningum út frá lengdum hliða í n-hyrningi. Þannig gat hann reiknað hliðalengdir (og þar með ummál) 12, 24, 48 og 96 hyrninga. Og með því að nota sömu aðferð hefði verið hægt að halda áfram og reikna hliðalengd umritaðs og innritaðs 192-hyrnings.



Ummál hrings er á milli ummáls innritaðs og umritaðs n-hyrnings og bilið er því þrengra sem n er hærri tala.

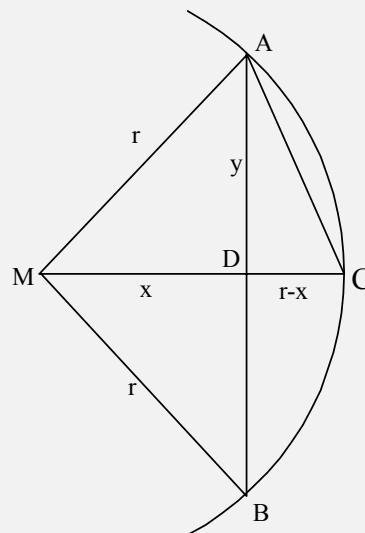
Með þessari aðferð komst Arkimedes að því að  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$  sem er nokkurn veginn sama bil og  $3.140845 < \pi < 3.142857$ .

Að reikna hliðalengd reglulegs marghyrnings með 2n horn út frá hliðalengd reglulegs n-hyrnings

Reglulegur n-hyrningur er innritaður í hring með gefinn radíus. Ef lengd hliða í n-hyrningnum er þekkt þá er hægt að reikna lengd hliða í innrituðum marghyrningi með 2n horn með þeirri aðferð sem hér greinir.

Köllum miðju hringsins M og gerum ráð fyrir að strikið AB sé ein hlið í n-hyrningnum. Strikið MC helmingar  $\angle AMB$  og C liggur á hringferlinum. Þá er AC ein hlið í innrituðum marghyrningi með 2n horn.

Látum D vera skurðpunkt AB og MC og



látum  $x$  tákna lengd striksins MD og  $y$  tákna lengd striksins AD.

Auðvelt er að reikna  $y$  þar sem AB er þekkt því  $y = \frac{AB}{2}$

Þegar  $y$  er fundið er vandalaust að reikna  $x$  því  $x^2 + y^2 = r^2$  svo  $x = \sqrt{r^2 - y^2}$

Þegar  $x$  og  $y$  er fundið er hægt að reikna lengd AC með Pythagórasarreglu því

$$AC = \sqrt{(r-x)^2 + y^2} = \sqrt{\left(r - \sqrt{r^2 - y^2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$$

Á fyrstu öldum okkar tímatala komust kínverskir stærðfræðingar fram úr Arkimedesi. Á 3. öld e. Kr. reiknaði Liu Hui ummál innritaðs og umritaðs 192-hyrnings og fékk út að  $3.141024 < \pi < 3.142704$  og á 5. öld reiknaði Tsu Chung Chih út að  $3.1415926 < \pi < 3.145927$ .

Aðferð Arkimedesar var ekki endurbætt af Evrópumönnum fyrr en á 17. öld þegar Newton reiknaði  $\pi$  með 16 markverðum stöfum og Leibniz fann runu til að nálgast gildi á fallinu arctan.

Runan sem Leibniz uppgötvaði er oftast skrifuð svona:

$$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9 - x^{11}/11 + \dots$$

Hér er gert ráð fyrir að stærð horns sé mæld í radiönnum (þar sem  $360^\circ = 2\pi$  radíanar). Þar sem  $\tan(\pi/4) = 1$  fæst fjórðungur af  $\pi$  með því að setja 1 inn fyrir  $x$  í runu Leibniz svo

$$\pi = 4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \dots)$$

Þar sem runan er endalaus er ekki hægt að ljúka þessum reikningi en með því að halda nógu lengi áfram er hægt að reikna  $\pi$  með hvað mikilli nákvæmni sem er. Sama má reyndar segja um aðferð Akimedesar. Með því að helminga hornið nógu oft er hægt að reikna  $\pi$  með hvað mörgum aukastöfum sem er. En aðferð Leibniz er fljótlegri og auðveldari.

Í byrjun 18. aldar reiknaði stjörnufræðingurinn Abraham Sharp  $\pi$  með 72 markverðum stöfum. Síðan hefur margt gerst í rannsóknum á  $\pi$  hér verður fátt eitt nefnt.

Árið 1755 fann Leonhard Euler fljótlega aðferð til að nálgast rétt gildi á  $\pi$  þegar hann sannaði að

$$\pi = 12(1/1^2 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + 1/5^2 - 1/6^2 + \dots)$$

Árið 1766 sannaði Jóhann Lambert að  $\pi$  sé óræð tala.

Árið 1882 sannaði F. Lindemann að  $\pi$  sé ekki algebrísk tala (þ.e. ekki sé til margliða með ræðum stuðlum sem hefur núllstöð í  $\pi$ ).

Um miðja 20. öld voru fyrstu tölvurnar smíðaðar og með hjálp þeirra tókst að reikna meira en 1.000 fyrstu aukastafi  $\pi$  fyrir 1950 og 1961 voru 100.000 fyrstu aukastafi  $\pi$  þekkir.

Að mestu byggt á:

A. Aaboe: *Episodes from the Early History of Mathematics*, Whashington DC 1964.

P. Beckmann: *A History of  $\pi$* , New York 1971.