

Atli Harðarson Tvíundastrengir

I. Inngangur

Tvíundastrengur er runa tvenns konar tákna. Hér verða notuð tákni 0 og 1. Streng úr þessum tveim táknum má túlka sem jákvæða heiltölu ritaða í talnakerfi með grunntöluna 2. Sé það gert er eðlilegt að raða strengjunum eftir tölugildi. Lóðréttu raðirnar hér að neðan sýna alla eins bita, tveggja bita, þriggja bita og fjögurra bita strengi í röð. Í fyrsta dálkinum er tölugildi þeirra ritað með venjulegum rithætti (þ.e. í tugakerfi).

tölu- gildi	eins bita strengir	tveggja bita strengir	þriggja bita strengir	fjögurra bita strengir
0	0	00	000	0000
1	1	01	001	0001
2		10	010	0010
3		11	011	0011
4			100	0100
5			101	0101
6			110	0110
7			111	0111
8				1000
9				1001
10				1010
11				1011
12				1100
13				1101
14				1110
15				1111

Eins og sést af töflunni er aðvelt að framleiða alla tveggja bita tvíundastrengi úr lista yfir alla eins bita strengi. Það er gert með því að bæta fyrst 0 framan við alla eins bita strengi og svo einum framan við alla eins bita strengi. Á sama hátt má búa til alla mögulega $n+1$ bita strengi ef gefinn er listi yfir alla mögulega n bita strengi - fyrst er bætt 0 framan við hvern streng á listanum og við það fást n mismunandi strengir, svo er 1 bætt framan við hvern streng og þá fást n mismunandi strengir í viðbót. Ef fjöldi strengja af lengd n er j þá eru sem sagt til $2j$ strengir af lengd $n+1$. Þar sem til eru tveir mismunandi strengir af lengd 1 leiðir af þessu að fyrir allar jákvæðar heiltölur, n , eru til 2^n mismunandi tvíundastrengir af lengd n .

II. Ritháttur

Hér á eftir verður mengi allra tvíundastrengja af lengd n kallað T_n , t.d. tákna T_5 safn allra tvíundastrengja af lengd 5. Ég nota sT_n til að tákna mengi allra tvíundastrengja sem hægt er að mynda með því að bæta strengnum s framan við streng úr T_n , t.d. tákna $0T_n$ mengi allra tvíundastrengja sem hægt er að mynda með því að bæta 0 framan við streng úr T_n . Það sem sagði í inngangi um hvernig hægt er að mynda alla tvíundastrengi af lengd $n+1$ úr safni allra tvíundastrengja af lengd n má nú orða svo að $T(n+1) = 0T_n \cup 1T_n$.

Strengur sem myndaður er með því að endurtaka strenginn s í k skipti tákna ég með $k \times s$.
Dæmi:

$$4 \times 10 = 10101010$$

$$5 \times 1 = 11111$$

$$7 \times 001 = 001001001001001001$$

Ef s og t eru tvíundastrengir þá tákna st , $(s)t$, $s(t)$ og $(s)(t)$ strenginn sem fæst með því að skeyta s framan við t . Dæmi:

$$(4 \times 1)01 = 111101$$

$$(3 \times 01)(5 \times 1) = 0101011111$$

Fjöldi strengja af lengd n sem innihalda strenginn s er táknaður með $F(n, s)$. Dæmi:

$$F(4, 2 \times 1) = 8.$$

Fjöldi strengja af lengd n sem innihalda ekki strenginn s er táknaður með $E(n, s)$.

Lengd strengsins s er táknuð með $L(s)$. Dæmi $L(1001) = 4$.

Þegar tölur eru ritaðar og tilgreina þarf hvaða grunntala er notuð er grunntalan skrifuð aftan við töluna og höfð neðar í línu. T.d. táknar 207_8 töluna sem er rituð 207 í talnakerfi með grunntöluna 8 . Sé engin grunntala tiltekin er átt við tugakerfi. Í stað 207_{10} er því ritað 207 . Ef s er einhver tvíundastrengur þá táknar s_g tölustafastrenginn sem fæst þegar strengurinn s er túlkaður sem tala í tvíundakerfi og sú tala er umrituð í talnakerfi með grunntöluna g . T.d. er $1101_8 = 15$

III. Hve margir tvíundastrengir af lengd n innihalda $k \times 1$ fyrir gefið gildi á k ?

Eins og hægt er að komast að með því að skoða töfluna á bls. 1 eru til 3 þriggja bita strengir sem innihalda 2×1 , þ.e. $F(3, 2 \times 1) = 3$. Þetta eru strengirnir: 011, 110 og 111. Það eru til 8 fjögurra bita strengir sem innihalda 2×1 , þ.e. $F(4, 2 \times 1) = 8$. Þetta eru strengirnir: 0011, 0110, 0111, 1011, 1100, 1101, 1110 og 1111.

Augljóslega gildir almennt að $F(k, k \times 1) = 1$. Einnig er næsta augljóst að $F(k+1, k \times 1) = 3$. Þetta eru strengirnir: $0(k \times 1)$, $(k \times 1)0$ og $(k+1) \times 1$. (Ath. „ $0(k \times 1)$ “ er strengurinn sem fæst með því að bæta 0 framan við strenginn $k \times 1$).

Almennt gildir að tvíundastrengir af lengd n skiptast í tvo jafnstóra flokka sem eru $0T(n-1)$ og $1T(n-1)$. Ef j stök í menginu $T(n-1)$ innihalda tvíundastrenginn $k \times 1$ hljóta einnig að vera j stök í menginu $0T(n-1)$ sem innihalda $k \times 1$. Í menginu $1T(n-1)$ eru hins vegar $j+i$ stök sem innihalda $k \times 1$ þar sem i er fjöldi þeirra strengja í $T(n-1)$ sem hefjast á $((k-1) \times 1)0$ og innihalda ekki $k \times 1$. (Þegar 1 er bætt framan við þessa strengi fást strengir sem byrja á $k \times 1$ og fjöldi þessara strengja bætist við j). Þótt við vitum ekki enn hvað i er getum við slegið því föstu að $F(n, k \times 1) = 2 \cdot F(n-1, k \times 1) + i$.

Finum nú töluna i . Ef tvíundastrengur af lengd $n-1$ hefst á $((k-1) \times 1)0$ þá eru $n-1-k$ bitar aftan við $((k-1) \times 1)0$ því strengurinn $((k-1) \times 1)0$ hefur lengdina k . Þessir $n-1-k$ bitar geta verið á 2^{n-1-k} mismunandi vegu. Talan i er því $2^{n-1-k} \cdot F(n-1-k, k \times 1)$ og almennt gildir:

Setning 1: $F(n, k \times 1) = 2 \cdot F(n-1, k \times 1) + 2^{n-1-k} \cdot F(n-1-k, k \times 1)$.

Þessa setningu, ásamt þeirri vitneskju að $F(k, k \times 1) = 1$ og $F(k+1, k \times 1) = 3$, getum við notað til að skrifa töflu yfir fallið $F(n, k \times 1)$. Hér fyrir neðan er slík tafla þar sem hvert gildi á n myndar dálk og hvert gildi á k myndar línu.

	$k \times 1$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$n=12$	$n=13$	$n=14$
$k=1$	1	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	16383
$k=2$	11	0	1	3	8	19	43	94	201	423	880	1815	3719	7582	15397
$k=3$	111	0	0	1	3	8	20	47	107	238	520	1121	2391	5056	10616
$k=4$	1111	0	0	0	1	3	8	20	48	111	251	558	1224	2656	5713
$k=5$	11111	0	0	0	0	1	3	8	20	48	112	255	571	1262	2760
$k=6$	111111	0	0	0	0	0	1	3	8	20	48	112	256	575	1275
$k=7$	1111111	0	0	0	0	0	0	1	3	8	20	48	112	256	576
$k=8$	11111111	0	0	0	0	0	0	0	1	3	8	20	48	112	256
$k=9$	111111111	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	8	20	48	112
$k=10$	1111111111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	8	20	48
$k=11$	11111111111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	8	20
$k=12$	111111111111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	8
$k=13$	1111111111111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
$k=14$	11111111111111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Þar sem $F(n, k \times 1) = 0$ ef $k > n$ gildir að $F(n-1-k, k \times 1) = 0$ ef $k \geq n/2$ svo það leiðir beint af setningu 1 að ef $k \geq n/2$ þá er $F(n, k \times 1) = 2 \cdot F(n-1, k \times 1) + 2^{n-1-k}$. Í töflunni er svæðið þar sem $n \geq k \geq n/2$ afmarkað með breiðum strikum. Innan þessa svæðis byrjar hver lína á 1 og ef tala númer a (í gefinni línu innan svæðisins) er kölluð $t(a)$ gildir ef $a \geq 1$ að $t(a+1) = 2 \cdot t(a) + 2^{a-1}$.

*

Það sem hér hefur verið sagt um fallið $F(n, k \times 1)$ gildir að sjálfsögðu líka um $F(n, k \times 0)$. En hvað með $E(n, k \times 1)$?

Ef $E(n, 2 \times 1)$ er fjöldi strengja af lengd n sem ekki innihalda 11 þá er $E(n, 2 \times 1) = 2^n - F(n, k \times 1)$. Með einfaldri þrepaðsönnun er hægt að sýna fram á að:

$$E(n, 2 \times 1) = E(n-1, 2 \times 1) + E(n-2, 2 \times 1).$$

Þetta gildir ef $n = 3$ því $2^3 - 3 = (2^2 - 1) + (2^1 - 0)$ sbr. töfluna neðst á bls. 2. Einnig gildir þetta um $n+1$ ef þetta gildir um n því:

$$\begin{aligned} E(n+1, 2 \times 1) &= 2^{n+1} - F(n+1, 2 \times 1) = \\ &= 2^n + 2^n - (2 \cdot F(n, 2 \times 1) + 2^{n-2} - F(n-2, 2 \times 1)) = \\ &= (2^n - F(n, 2 \times 1)) + (2^n - F(n, 2 \times 1)) - (2^{n-2} + F(n-2, 2 \times 1)) = \\ &= E(n, 2 \times 1) + E(n, 2 \times 1) - E(n-2, 2 \times 1). \end{aligned}$$

Og ef $E(n, 2 \times 1) = E(n-1, 2 \times 1) + E(n-2, 2 \times 1)$ þá jafngildir þetta því að

$$\begin{aligned} E(n+1, 2 \times 1) &= E(n, 2 \times 1) + (E(n-1, 2 \times 1) + E(n-2, 2 \times 1)) - E(n-2, 2 \times 1) \Rightarrow \\ E(n+1, 2 \times 1) &= E(n, 2 \times 1) + E(n-1, 2 \times 1). \end{aligned}$$

Þar sem $E(1, 2 \times 1) = 2^1 - 0 = 2$ sem er fibonaccitala númer $1+2 = 3$ og $E(2, 2 \times 1) = 2^2 - 1 = 3$ sem er fibonaccitala númer $2+2 = 4$ hefur verið sýnt fram á eftirfarandi setningu:

Setning 2: $E(n, 2 \times 1)$ er fibonaccitala númer $n + 2$, þ.e. tala númer $n + 2$ í talnaröðinni: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ...

Raunar er þessi setning aðeins sértílvik miklu almennari reglu sem hér er sett fram sem setning númer 3.

Setning 3: Ef $n < k$ þá er $E(n, k \times 1) = 2^n$ annars er $E(n, k \times 1) = E(n-1, k \times 1) + E(n-2, k \times 1) + \dots + E(n-k, k \times 1)$.*

Þessi setning segir að fyrir sérhvert gildi á k sé talnarunan $E(1, k \times 1), E(2, k \times 1), E(3, k \times 1) \dots$ mynduð þannig að fyrst komi $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{k-1}$ og eftir það sé sérhver tala summa næstu k talna á undan. Þetta er hægt að sanna með eftirfarandi þrepaðsönnun sem er nauðalík sönnuninni á setningu 2.

Setningin gildir augljóslega fyrir $n < k$. Hún gildir líka fyrir $n = k$ því þá er:

$$E(n, k \times 1) = 2^n - F(k, k \times 1) = 2^k - 1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}$$

Ef setningin gildir fyrir n þá gildir hún fyrir $n+1$ því:

$$\begin{aligned} E(n+1, k \times 1) &= 2^{n+1} - F(n+1, k \times 1) \Rightarrow \\ E(n+1, k \times 1) &= 2^n + 2^n - (2 \cdot F(n, k \times 1) + 2^{n-k} - F(n-k, k \times 1)) \Rightarrow \\ E(n+1, k \times 1) &= (2^n - F(n, k \times 1)) + (2^n - F(n, k \times 1)) - (2^{n-k} - F(n-k, k \times 1)) \end{aligned}$$

Ef reglan gildir fyrir n þá má setja langlokuna

$$(2^{n-1} - F(n-1, k \times 1)) + (2^{n-2} - F(n-2, k \times 1)) + \dots + (2^{n+1-k} - F(n+1-k, k \times 1)) + (2^{n-k} - F(n-k, k \times 1))$$

* Gert er ráð fyrir að $E(0, k \times 1) = 1$.

í staðinn fyrir $(2^n - F(n, k \times 1))$ og fá út jöfnuna:

$$E(n+1, k \times 1) = (2^n - F(n, k \times 1)) + [(2^{n-1} - F(n-1, k \times 1)) + (2^{n-2} - F(n-2, k \times 1)) + \dots + (2^{n+1-k} - F(n+1-k, k \times 1)) + (2^{n-k} - F(n-k, k \times 1))] - (2^{n-k} - F(n-k, k \times 1)) \Rightarrow$$

$$E(n+1, k \times 1) = (2^n - F(n, k \times 1)) + (2^{n-1} - F(n-1, k \times 1)) + \dots + (2^{n+1-k} - F(n+1-k, k \times 1)) \Rightarrow$$

$$E(n+1, k \times 1) = E(n, k \times 1) + E(n-1, k \times 1) + \dots + E(n+1-k, k \times 1). \blacksquare$$

Samsvarandi setning gildir að sjálfsgöðu um $E(n, k \times 0)$.

IV. Strengir sem ekki geta skarast við sjálfa sig

Sumir strengir, s , eru þannig að þeir geta ekki komið fyrir tvisvar sem hluti af sama streng, t , nema $L(t) \geq 2 \cdot L(s)$. Við segjum að þessir strengir geti ekki skarast við sjálfa sig. $s_1 = 101100$ er dæmi um slíkan streng. $s_2 = 10010$ er hins vegar dæmi um streng sem getur skarast við sjálfan sig og þar með komið tvisvar fyrir í streng sem hefur minni lengd en $2 \cdot L(s_2)$. T.d. kemur s_2 tvisvar fyrir í $s_3 = \mathbf{10010010}$ þótt $L(s_3) < 2 \cdot L(s_2)$. Fyrri skiptið er feitletrað og það seinna undirstrikað og stafirnir tveir sem eru bæði feitletraðir og undirstrikaðir eru skörun s_2 við sjálfan sig.

Skilyrði þess að strengur s geti ekki skarast við sjálfan sig er að ekki sé til nein tala $k < L(s)$ þannig að k fyrstu stafirnir í s myndi sama streng og k síðustu stafirnir í s .

Ef strengur s getur ekki skarast við sjálfan sig getur hann aðeins komið einu sinni fyrir í streng t ef $L(t) < 2 \cdot L(s)$. Af þessu má leiða eftirfarandi setningu um þessa strengi.

Setning 4: Ef s getur ekki skarast við sjálfan sig $L(s) = k$ og $n < 2 \cdot k$ þá er

$$F(n, s) = (n - k + 1) \cdot 2^{n-k}.$$

Sönnun: Ef s kemur fyrir í sætum númer $n-k+1$ til n í streng af lengd n þá eru $n-k$ bitar þar fyrir framan og þeir geta verið á 2^{n-k} vegu. Því eru til 2^{n-k} mismunandi strengir af lengd n sem hafa s í sætum númer $n-k+1$ til n . Köllum mengi þessara strengja \mathbf{M}_n (því s endar í sæti númer n).

Af sömu ástæðum eru til 2^{n-k} mismunandi strengir af lengd n sem hafa s í sætum númer $n-k$ til $n-1$, það eru jú $n-k-1$ bitar fyrir framan s og 1 biti fyrir aftan s og þessir $n-k$ bitar geta verið á 2^{n-k} mismunandi vegu. Köllum mengi þessara strengja \mathbf{M}_{n-1} .

Með sama hætti er hægt að skilgreina mengin $\mathbf{M}_{n-2}, \mathbf{M}_{n-3}, \dots, \mathbf{M}_k$. Það síðasta í röðinni hefur s í sætum 1 til k . Þessi mengi eru $n-k+1$ talsins og þau hafa öll fjöldatöluna 2^{n-k} . Ef \mathbf{M} er mengi allra strengja af lengd n sem innihalda s þá er $\mathbf{M} = \mathbf{M}_n \cup \mathbf{M}_{n-1} \cup \dots \cup \mathbf{M}_k$ (þ.e. \mathbf{M} er sammengi allra mengjanna $\mathbf{M}_n, \mathbf{M}_{n-1}, \dots, \mathbf{M}_k$). Þar sem ekkert stak tilheyrir tveim af mengjunum $\mathbf{M}_n, \mathbf{M}_{n-1}, \dots, \mathbf{M}_k$, (því þá kæmi s tvisvar fyrir í því staki) er fjöldatala \mathbf{M} jöfn samanlagðri fjöldatölu mengjanna $\mathbf{M}_n, \mathbf{M}_{n-1}, \dots, \mathbf{M}_k$ svo í \mathbf{M} eru $(n - k + 1) \cdot 2^{n-k}$ stök. ■

*

Nú hafa verið leiddar út fremur einfaldar reglur um hve margir tvíundastrengir af lengd n innihalda (og innihalda ekki) strengi á forminu $k \times 0$ og $k \times 1$ og strengi sem hafa lengd meira en $n/2$ og geta ekki skarast við sjálfa sig. Hægt er að leiða út fleiri reglur um strengi af tilteknum gerðum. En ætli það sé hægt að leiða út almenna reglu um hve margir tvíundastrengir af lengd n innihalda (eða innihalda ekki) streng s , þar sem s er einhver handahófskennd runa af táknum 0 og 1 og $L(s) \leq n$?

V. Hæsta og lægsta gildi $F(n, s)$ fyrir gefin gildi á n og $L(s)$

Í sönnuninni á setningu 5 voru þær forsendur að $n < 2 \cdot L(s)$ og s geti ekki skarast við sjálfan sig aðeins notaðar til að sýna fram á að ekkert stak geti tilheyrt meira en einu af mengjunum $\mathbf{M}_n, \mathbf{M}_{n-1}, \dots, \mathbf{M}_k$. Öll þessi mengi hafa sömu fjöldatölu, nefnilega 2^{n-k} , þar sem $k = L(s)$, svo fremi $k \leq n$. Með öðrum orðum eru til, fyrir sérhverja tölu i (þar sem $k \leq i \leq n$) 2^{n-k} mismunandi strengir af lengd n sem hafa gefinn streng, s , af lengd k í sætum $i-k+1$ til i . Mengi þessara strengja kallast hér \mathbf{M}_i . Mengi allra tvíundastrengja af lengd n sem innihalda s er sammengi allra mengjanna $\mathbf{M}_n, \mathbf{M}_{n-1}, \dots, \mathbf{M}_k$. Fjöldatala þessa sammengis getur aldrei verið meira en summan af fjöldatölum mengjanna $\mathbf{M}_n, \mathbf{M}_{n-1}, \dots, \mathbf{M}_k$. Við getum því staðhæft eftirfarandi setningu:

Setning 5: Ef s er einhver tvíundastrengur og $L(s) \leq n$ þá er $F(n, s) \leq (n - k + 1) \cdot 2^{n-k}$.

Þessi setning segir hvað strengur af tiltekinni lengd, k , getur í mesta lagi komið fyrir í mörgum strengjum af lengd n . En hvað með neðri mörkin. Er einhver regla til um hvað strengur af lengd k kemur að minnsta kosti fyrir í mörgum strengjum af lengd n ?

Þar sem mengin $\mathbf{M}_n, \mathbf{M}_{n-1}, \dots, \mathbf{M}_k$ eru jafnstór fyrir alla strengi af lengd k koma allir strengir af lengd k jafnoft fyrir ef skrifaðir eru upp allir strengir af lengd n þar sem $n > k$. Ef $L(s_1) = L(s_2)$ og $F(n, s_1) > F(n, s_2)$ þá kemur s_1 fyrir í fleiri strengjum af lengd n og þar með að meðaltali sjaldnar í hverjum.

Þeir strengir sem geta skarast við sjálfa sig á flesta vegu, og eiga þess því flesta kosti að koma oft fyrir í sama streng, eru strengir á forminu $k \times 0$ og $k \times 1$. Ef s er á þessu formi er fjöldatala sniðmengis hverra tveggja mengja \mathbf{M}_i og \mathbf{M}_j (þar sem $k \leq i \leq n$ og $k \leq j \leq n$) eins há og verið getur. Fjöldatala sammengisins $\mathbf{M} = \mathbf{M}_n \cup \mathbf{M}_{n-1} \cup \dots \cup \mathbf{M}_k$ er því í lágmarki (fyrir gefin gildi á n og k) þegar s er á forminu $k \times 0$ eða $k \times 1$. Því hlýtur að gilda:

Setning 6: Ef $L(s) \leq n$ þá er $F(n, s) \geq F(n, L(s) \times 1)$.

Þar sem $F(n, L(s) \times 1) = 2^n - E(n, k \times 1)$, m.v. að $k = L(s)$, er hægt að nota setningu 3 til að reikna $F(n, L(s) \times 1)$.

Séu setningar 5 og 6 dregnar saman fæst ójafnan:

Setning 7: Ef $L(s) \leq n$ þá er $F(n, L(s) \times 1) \leq F(n, s) \leq (n - k + 1) \cdot 2^{n-k}$

Sem dæmi má taka að ef $n = 90$ og $k = 30$ þá segir setning 7 að $F(n, s)$ sé á milli $3.458.764.513.820.540.000 \approx 3,46 \cdot 10^{18}$ og $35.740.566.642.812.300.000 \approx 3,57 \cdot 10^{19}$. Þetta er milli 0,0000002794% og 0,0000028871% af fjölda allra tvíundastrengja af lengd 90.

*

Þetta greinarkorn gæti sem best endað hér en mig langar samt að bæta við dálitlu um sambandið milli tvíundastrengja og tölustafa þegar notaðar eru grunntölur sem eru heil veldi af 2 eins og t.d. 8 eða 16.

VI. Strengir af lengd k og talnakerfi með grunntöluna 2^k

Ef tvíundastrengur af lengd $n = k \cdot m$ er túlkaður sem heiltala rituð í tvíundakerfi er auðvelt að umrita hann sem tölu sem rituð er með m stöfum í talnakerfi með grunntöluna 2^k . Til dæmis samsvarar hver einn tölustafur í tölu sem rituð er með sætisrithætti og grunntölunni 8 alltaf þrem tölustöfum ef talan er rituð með grunntölunni 2 því $8 = 2^3$. Taflan á næstu blaðsíðu sýnir hvernig tvíundastrengir af lengd 3 samsvara tölustöfunum sem notaðir eru ef grunntalan er 8 og hvernig tvíundastrengir af lengd 4 samsvara tölustöfunum sem notaðir eru ef grunntalan er 16. (Hér eru tölurnar sem eru hærrí en 9 og rita þarf með einum tölustaf ef grunntalan er 16 ritaðir með bókstöfunum A, B, C, D, E, F eins og venja er.)

þriggja bita strengir	tölustafir ef grunntala er átta	fjögurra bita strengir	tölustafir ef grunntala er sextán
000	0	0000	0
001	1	0001	1
010	2	0010	2
011	3	0011	3
100	4	0100	4
101	5	0101	5
110	6	0110	6
111	7	0111	7
		1000	8
		1001	9
		1010	A
		1011	B
		1100	C
		1101	D
		1110	E
		1111	F

Tökum dæmi: Notum töfluna til að umrita tvíundastrenginn 101001111011_2 í talnakerfi með grunntöluna $8 = 2^3$. Fyrst skiptum við strengnum í þriggja bita hluta, svona:

$101 \ 001 \ 111 \ 011_2$

síðan skiptum við á hverjum þriggja bita hluta og samsvarandi tölustaf, svona:

$5 \ 1 \ 7 \ 3$.

Af töflunni má semsagt ráða að $101001111011_2 = 5173_8$. Með sömu aðferð fæst að $101001111011_2 = 1010 \ 0111 \ 1011_2 = A7B_{16}$.

Almennt gildir að ef grunntala talnakerfis er g þá eru til g^m mismunandi tölur sem rita má með m tölustöfum. Í talnakerfi með grunntöluna 10 eru t.d. til $10^3 = 1000$ mismunandi

þriggja stafa tölur (000, 001, 002, ... 999). Einnig gildir almennt að ef grunntala er g og a er einn af tölustöfunum ($0 \leq a < g$) þá eru til $(g - 1)^m$ mismunandi tölur sem rita má með m tölustöfum án þess að nota tölustafinn a . Af þessu og því sem sagt er um umritun talna úr tvíundakerfi í talnakerfi með grunntölu 2^k leiðir eftirfarandi setningu:

Setning 8: Ef s er tvíundastrengur, $k = L(s)$, $n = k \cdot m$ og $g = 2^k$ þá eru til:

- $(g - 1)^m$ mismunandi tvíundastrengir af lengd n þar sem s kemur **ekki** fyrir með þeim hætti að hann hefjist í einu af sætunum númer 1, $k+1$, $2k+1$, ... $(m-1)k+1$.
- $g^m - (g - 1)^m = 2^n - (g - 1)^m$ mismunandi tvíundastrengir af lengd n þar sem s kemur fyrir með þeim hætti að hann hefjist í einu af sætunum númer 1, $k+1$, $2k+1$, ... $(m-1)k+1$.

Af setningu 8-i) leiðir:

Setning 9: Ef $L(s) = k$, $n = k \cdot m$ þá er $F(n, s) \geq 2^n - (2^k - 1)^m$

Séu setningar 5 og 9 dregnar saman fæst:

Setning 10: Ef $L(s) = k$, $n = k \cdot m$ þá er $2^n - (2^k - 1)^m \leq F(n, s) \leq (n - k + 1) \cdot 2^{n-k}$

Heldur auðveldara er að nota þessa ójöfnu en ójöfnuna í setningu 7 því það er minni fyrirhöfn að reikna $2^n - (2^k - 1)^m$ heldur en $F(n, L(s) \times 1)$. Þessi ójafna klemmir gildið þó ekki af á eins þröngu bili og hlýtur af þeim sökum að teljast heldur ómerkilegri.

*

Strengur, s , af lengd k getur komið fyrir sem hluti af streng, t , þar sem $L(t) = k \cdot m$, þannig að s byrji í einu af sætunum númer 1, $k+1$, $2k+1$, ... $(m-1)k+1$ og þá kemur tölustafurinn fyrir s_g (m.v. að $g = 2^k$) fyrir í t_g . En s getur komið fyrir sem hluti af t á fleiri vegu:

s getur byrjað í einu af sætunum númer k , $2k$, ... $(m-1)k$ og þá kemur tölustafurinn fyrir s_g fyrir í $(t \text{ div } 2)_g^{**}$ því $t \text{ div } 2$ er strengurinn sem fæst með því að taka aftasta bitann af t .

* Miðað er við að fyrsti stafur í streng (sem er lengst til vinstri í honum) sé númer 1.

** div tákna heiltöludeilingu. T.d. er $17 \text{ div } 3 = 5$.

s getur byrjað í einu af sætunum númer $k-1, 2k-1, \dots (m-1)k-1$ og þá kemur tölustafurinn fyrir s_g fyrir í $(t \operatorname{div} 2^2)_g$ því $t \operatorname{div} 2^2$ er strengurinn sem fæst með því að taka 2 öftustu bitana af t .

s getur byrjað í einu af sætunum númer $k-2, 2k-2, \dots (m-1)k-2$ og þá kemur tölustafurinn fyrir s_g fyrir í $(t \operatorname{div} 2^3)_g$ því $t \operatorname{div} 2^3$ er strengurinn sem fæst með því að taka 3 öftustu bitana af t .

Svona er hægt að halda áfram að telja þar til komið er að sætum númer $2, k+2, 2k+2 \dots (m-2)k+2$.

Dæmi: Ef $L(s) = 4$ og s kemur fyrir í $t = 1010010010111011$ þá er s undirstrikað í a.m.k. einni af línunum hér að neðan:

1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1

1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 (Ath. $t \operatorname{div} 2 = 101\ 0010\ 0101\ 1101$)

1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 (Ath. $t \operatorname{div} 2^2 = 10\ 1001\ 0010\ 1110$)

1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 (Ath. $t \operatorname{div} 2^3 = t \operatorname{div} 2^{k-1} = 1\ 0100\ 1001\ 0111$).

Það blasir nú við að ef $L(s) = k$ og $L(t) = n = k \cdot m$ og s kemur fyrir í t þá kemur tölustafurinn s_g (m.v. að $g = 2^k$) fyrir í einni af tölunum $t_g, (t \operatorname{div} 2)_g, (t \operatorname{div} 2^2)_g, \dots (t \operatorname{div} 2^{k-1})_g$. Leiðingin gildir ekki í hina áttina því tölustafurinn s_g getur komið fyrir í $(t \operatorname{div} 2^1)_g$ án þess að s komi fyrir í t . Þetta er vegna þess að ef s hefst á 0 getur tölustafurinn s_g verið fyrsti stafur í $(t \operatorname{div} 2^1)_g$ án þess s komi fyrir í t . Dæmi: Ef $s = 011 = 3_8$ og $t = 11001111 = 317_8$ þá kemur tölustafurinn s_g (þar sem $g = 8$) fyrir í 11001111_g án þess að s komi fyrir í t . Þetta getur ekki gerst ef s hefst á 1.

Röksemdafærslan hér af ofan staðfestir eftirfarandi setningu:

Setning 11: Ef s og t eru tvíundastrengir, $L(s) = k$, $L(t) = n = k \cdot m$, s byrjar á 1 og $g = 2^k$ þá kemur s fyrir sem hluti af t þá og því aðeins að tölustafurinn s_g komi fyrir í a.m.k. einni af tölunum $t_g, (t \operatorname{div} 2)_g, (t \operatorname{div} 2^2)_g, \dots (t \operatorname{div} 2^{k-1})_g$